Merkwürdige Dezimalzahlen

Michael Drmota, Wien

Zusammenfassung

Dezimalzahlen beinhalten viele Merkwürdigkeiten. Dies beginnt schon bei der Eigenschaft, daß $0.999999999\cdots = 1$ ist. Merkwürdig ist auch, daß die Periode einer periodischen Dezimalzahl nie länger ist als der Nenner der Bruchzahl, die sie darstellt. Selbst wenn man nur die Dezimalentwicklung von natürlichen Zahlen betrachtet, stößt man auf unerwartetet Merkwürdigkeiten, z.B. bei der Ziffernsumme gewisser Zahlen. So ist etwa die Ziffernsumme der Zahlen

$$10^k - 1,\ 2\cdot(10^k-1),\ 3\cdot(10^k-1),\ \ldots,\ 10^k\cdot(10^k-1)$$

immer gleich der Ziffernsumme der ersten Zahl $10^k - 1 = 99\cdots 9$, nämlich $9k$. Ganz besonders merkwürdig sind *unendlich große* Dezimalzahlen. Beispielsweise hat die Gleichung $x^2 = x$ außer den *kleinen* Lösungen $x = 0$ und $x = 1$ noch zwei weitere, nämlich $x = \cdots 9376$ und $x = \cdots 0625$.

1 Die Dezimalentwicklung

Jede natürliche Zahl n läßt sich eindeutig als *Dezimalzahl*, d.h. in der Form

$$n = a_k 10^k + a_{k-1}10^{k-1} + \cdots + a_1 10 + a_0$$

darstellen, wobei die *Ziffern* a_j $(1 \le j \le k)$ nur Werte aus der Menge

$$a_j \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$$

annehmen können, z.B.

$$n = 4723 = 4\cdot 10^3 + 7\cdot 10^2 + 2\cdot 10 + 3.$$

Bei negativen ganzen Zahlen $n < 0$ stellt man den Absolutbetrag $|n|$ in dieser Form dar und schreibt ein Minuszeichen davor: $-328 = -(3\cdot 10^2 + 2\cdot 10 + 8)$.

Weiters hat jede positive reelle Zahl x hat auch eine (meist) *unendliche Dezimalentwicklung*, d.h.

$$\begin{aligned} x &= a_k 10^k + a_{k-1}10^{k-1} + \cdots + a_1 10 + a_0 + a_{-1}10^{-1} + a_{-2}10^{-2} + \cdots \\ &= a_k a_{k-1}\cdots a_1 a_0 . a_{-1}a_{-2}\cdots, \end{aligned}$$

wobei die *Dezimalstellen* $a_{-1}, a_{-2}, \ldots$ wiederum nur Werte aus der Menge

$$a_{-j} \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$$

annehmen. (Bei negativen rellen Zahlen x wird wieder der Betrag $|x|$ in dieser Weise dargestellt und ein Minuszeichen davorgeschrieben.)

Die Bestimmung der Dezimalstellen $a_{-1}, a_{-2}, \ldots$ erfolgt mittels Intervallschachtelung. Zunächst stellt man die relle Zahl $x > 0$ durch $x = n + y$ dar, wobei n eine natürliche Zahl ist und y eine reelle Zahl zwischen 0 und 1, genauer $0 \leq y < 1$. Die natürliche Zahl n hat eine Dezimaldarstellung wie oben. Man muß sich daher nur y näher betrachten. Zunächst zerlegt man das Intervall $[0,1)$ in zehn Teilintervalle

$$[0,1) = \left[0, \frac{1}{10}\right) \cup \left[\frac{1}{10}, \frac{2}{10}\right) \cup \left[\frac{2}{10}, \frac{3}{10}\right) \cup \cdots \cup \left[\frac{9}{10}, 1\right)$$

Liegt y etwa im Intervall $\left[\frac{5}{10}, \frac{6}{10}\right)$, so kann y durch

$$y = 5 \cdot 10^{-1} + y_1 \qquad \text{mit} \quad 0 \leq y_1 \leq \frac{1}{10}$$

dargestellt werden. Im nächsten Schritt zerlegt man das Intervall $\left[0, \frac{1}{10}\right)$ in zehn Teilintervalle

$$\left[0, \frac{1}{10}\right) = \left[0, \frac{1}{100}\right) \cup \left[\frac{1}{100}, \frac{2}{100}\right) \cup \left[\frac{2}{100}, \frac{3}{100}\right) \cup \cdots \cup \left[\frac{9}{100}, \frac{1}{10}\right)$$

und entscheidet, in welchem dieser Teilintervalle y_1 liegt. Ist etwa $y_1 \in \left[\frac{2}{100}, \frac{3}{100}\right)$, so ist

$$y_1 = 2 \cdot 10^{-2} + y_2 \qquad \text{mit} \quad 0 \leq y_2 \leq \frac{1}{100}.$$

Führt man dieses Verfahren k-mal durch, wo gewinnt man eine Darstellung von y in der Form

$$y = a_{-1}10^{-1} + a_{-2}10^{-2} + \cdots + a_{-k}10^{-k} + y_k$$

mit $0 \leq y_k < 10^{-k}$. Schließlich erhält man durch den Grenzübergang $k \to \infty$ die gewünschte Darstellung.

Von besonderem Interesse sind periodische Dezimalentwicklungen.

Definition 1 *Die Dezimalentwicklung*

$$x = a_k a_{k-1} \cdots a_1 a_0 \,.\, a_{-1} a_{-2} \cdots,$$

einer positiven rellen Zahl x heißt **periodisch**, *wenn es natürliche Zahlen $l, m > 0$ gibt, so daß für alle $j > m$*

$$a_{-j-l} = a_{-j}$$

ist.

Eine Dezimalentwicklung heißt **endlich**, *wenn es eine natürliche Zahl m gibt, so daß für alle $j > m$*

$$a_{-j} = 0$$

ist.

Periodische Dezimalentwicklungen haben daher die Gestalt

$$a_k \cdots a_0 \,.\, a_{-1}a_{-2} \cdots a_{-m}a_{-m-1}a_{-m-1} \cdots a_{-m-l}a_{-m-1}a_{-m-1} \cdots a_{-m-l}a_{-m-1} \cdots$$

Üblicherweise wird dies durch

$$a_k \cdots a_0 \,.\, a_{-1}a_{-2} \cdots a_{-m}\overline{a_{-m-1}a_{-m-1} \cdots a_{-m-l}}$$

abgekürzt. Die Dezimalstellen $a_{-1}a_{-2} \cdots a_{-m}$ bilden die **Vorperiode** und die Dezimalstellen $a_{-m-1}a_{-m-1} \cdots a_{-m-l}$ die **Periode**. Man kann dabei die Vorperiode und die Periode kürzestmöglich wählen. l ist dann die **Länge der Vorperiode** und m die **Länge der Periode**.

Endliche Dezimalentwicklungen

$$a_k \cdots a_0 \,.\, a_{-1}a_{-2} \cdots a_{-m}0000 \cdots$$

werden durch

$$a_k \cdots a_0 \,.\, a_{-1}a_{-2} \cdots a_{-m}$$

abgekürzt.

Satz 1 *Eine reelle Zahl x ist genau dann eine rationale Zahl, wenn die ihre Dezimalentwicklung entweder endlich oder periodisch ist.*

Weiters ist im Fall einer rationalen Zahl $x = \frac{p}{q}$ die Länge der Periode der Dezimalentwicklung kleiner als q.

Beweis. Bei rationalen Zahlen $x = \frac{p}{q}$ gelingt es, die Intervallschachtelung mit Hilfe des üblichen Divisionsalgorithmus durchzuführen. Sei $0 < x = \frac{p}{q} < 1$ mit natürlichen Zahlen p, q. Man bestimmt sukzessive $a_{-1}, a_{-2}, \ldots \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ und Reste $r_1, r_2, \ldots$ mit

$$\begin{aligned} 10p &= a_{-1}q + r_1 & (0 \le r_1 < q) \\ 10r_1 &= a_{-2}q + r_2 & (0 \le r_2 < q) \\ 10r_2 &= a_{-3}q + r_3 & (0 \le r_3 < q) \\ &\vdots \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} \frac{p}{q} &= \frac{a_{-1}}{10} + \frac{r_1}{10q} = a_{-1}10^{-1} + y_1 \\ y_1 &= \frac{r_1}{10q} = \frac{a_{-2}}{100} + \frac{r_2}{100q} = a_{-2}10^{-2} + y_2 \\ y_2 &= \frac{r_2}{100q} = \frac{a_{-3}}{1000} + \frac{r_2}{1000q} = a_{-3}10^{-3} + y_3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Die Zahlen $a_{-1}, a_{-2}, \ldots$ bilden daher wirklich die Dezimalentwicklung von $x = \frac{p}{q}$.

Ist irgend ein Rest $r_j = 0$, so hat $x = \frac{p}{q}$ eine endliche Dezimalentwicklung. Im weiteren sei also vorausgesetzt, daß alle Reste $r_j > 0$ sind.

Es fällt auf, daß sobald ein Rest r_j feststeht, alle weiteren Dezimalstellen $a_{-j-1}, a_{-j-2}, \ldots$ und alle weiteren Reste $r_{j+1}, r_{j+2}, \ldots$ durch r_j bestimmt sind. Die Dezimalentwicklung wird daher genau dann periodisch, wenn es zwei Reste r_{j_1}, r_{j_2} mit $j_1 \neq j_2$ gibt, die gleich sind: $r_{j_1} = r_{j_2}$. Wäre die Dezimalentwicklung von $x = \frac{p}{q}$ nicht periodisch, so müßten alle Reste r_j voneinander verschieden sein. Da für die Reste r_j nur die Zahlen $\{1, 2, \ldots, q-1\}$ in Frage kommen, müssen unter q aufeinanderfolgenden Resten $r_j, r_{j+1}, \ldots, r_{j+q-1}$ wenigstens zwei gleich sein. Demnach ist die Dezimalentwicklung von $x = \frac{p}{q}$ periodisch. und die Länge der Periode kleiner als q.

Ist andererseits die Dezimalentwicklung einer Zahl $x \in [0,1)$ periodisch,

$$x = 0\,.\,a_{-1}a_{-2}\cdots a_{-m}\overline{a_{-m-1}a_{-m-2}\cdots a_{-m-l}}$$

so ist

$$\begin{aligned} 10^{m+l}x - 10^m x &= a_{-1}a_{-2}\cdots a_{-m}a_{-m-1}\cdots a_{-m-l}\,.\,\overline{a_{-m-1}a_{-m-1}\cdots a_{-m-l}} \\ &\quad - a_{-1}a_{-2}\cdots a_{-m}\,.\,\overline{a_{-m-1}a_{-m-1}\cdots a_{-m-l}} \\ &= a_{-1}a_{-2}\cdots a_{-m}a_{-m-1}\cdots a_{-m-l} - a_{-1}a_{-2}\cdots a_{-m} \end{aligned}$$

bzw.

$$x = \frac{p}{q}$$

mit

$$p = a_{-1}a_{-2}\cdots a_{-m}a_{-m-1}a_{-m-1}\cdots a_{-m-l} - a_{-1}a_{-2}\cdots a_{-m}$$

und

$$q = 10^{m+l} - 10^m.$$

Damit ist x rational. □.

Reelle Zahlen mit einer endliche Dezimalentwicklungen sind sicherlich rationale Zahlen. Sie können besonders leicht charakterisiert werden.

Satz 2 *Eine reelle Zahl x besitzt genau dann eine endliche Dezimalentwicklung, wenn sie rational ist und in der gekürzten Darstellung $x = \frac{p}{q}$ (als Bruch ganzer Zahlen p, q) der Nenner q nur 2 und/oder 5 als Primfaktoren hat.*

Beweis. Offensichtlich ist eine relle Zahl x mit endlicher Dezimalentwicklung

$$x = a_k \cdots a_0\,.\,a_{-1}a_{-2}\cdots a_{-m+1}$$

in der Form

$$x = \frac{Z}{10^m}$$

mit einer ganzen Zahl

$$Z = a_k 10^{k+m} + a_{k-1}10^{k+m-1} + \cdots + a_0 10^m + a_{-1}10^{m-1} + \cdots + a_{-m}$$

darstellbar. In der gekürzten Darstellung $x = \frac{p}{q}$ können also nur die Primfaktoren 2 und 5 im Nenner q auftreten.

Ist andererseits $x = \frac{p}{q}$ eine rationale Zahl von diese Gestalt, so lassen sich Zähler und Nenner geeignet erweitern, so daß

$$x = \frac{Z}{10^m}$$

ist, woraus sich sofort eine endliche Dezimaldarstellung ergibt. □.

Ein großer Vorteil der Dezimalentwicklung reeller Zahlen ist, daß man allein aus der Kenntnis der Dezimalentwicklung von zwei reellen Zahlen x, y alle Grundrechenoperationen $x+y$, $x-y$, $x \cdot y$ und x/y durchführen kann, indem man die Dezimalentwicklung des Ergebnisses angibt. Zur Demonstration soll (der Anfang) der Dezimalentwicklung von $\pi + e$ berechnet werden:

$$\begin{array}{rl} & 3.141592653\cdots \\ + & \underline{2.718281828\cdots} \\ & 5.85987448\cdots \end{array}$$

Man beachte, daß man, wenn man nicht alle Dezimalstellen von $x\,(=\pi)$ und $y\,(=e)$ zur Verfügung hat, beim Ergebnis $x+y$ nicht so viele Dezimalstellen berechnen kann wie bei x bzw. y bekannt sind, da nicht bekannt ist, ob bei der nächsten (unbekannten) Stelle ein Übertrag aufgetreten ist oder nicht. Wenn man nicht alle Stellen kennt, kann es auch passieren, daß man über das Ergebenis keine genaue Auskunft gewinnt. Im Beispiel

$$\begin{array}{rl} & 0.48294246\cdots \\ + & \underline{0.51705753\cdots} \\ & 0.????\cdots \end{array}$$

kann das Erbenis nur aus der Kenntnis der angegebenen Dezimalstellen nicht angegeben werden, da sich alle bekannten Dezimalstellen auf 9 ergänzen.

2 $x = 0.9999\cdots$

Wie am Ende des vorigen Abschnitts an einem Beispiel angedeutet wurde, ist eine reelle Zahl, deren Dezimalentwicklung auschließlich aus $a_{-j} = 9$ besteht, von besonderem Interesse. Es zeigt sich nämlich, daß $x = 0.9999\cdots = 1 = 1.0000\cdots$ ist. Damit ist die Dezimalentwicklung reeller Zahlen nicht eindeutig. Das im vorigen Abschnitt beschriebene Intervallschachtelungsverfahren hätte für $x = 1$ die Dezimalentwicklung $x = 1.0000\cdots$ geliefert. Die Dezimalentwicklung $0.9999\cdots$ kann in durch das eben erwähnte Intervallschachtelungsverfahren nicht entstehen.

Es soll zunächst untersucht werden, warum eine Zahl x mit der Dezimalentwicklung $x = 0.9999\cdots$ tatsächlich 1 ist. Dafür werden vier verschiedene Begründungen gegeben.

Satz 3 $0.9999\cdots = 1$.

1. **Beweis.** Aus dem Divisonsalgorithmus ergibt sich, daß die rationalen Zahlen $x = \frac{1}{3}$ bzw. $y = \frac{2}{3}$ die periodischen Dezimalentwicklungen

$$\begin{aligned} x &= 0.3333\cdots = \sum_{j=1}^{\infty} 3 \cdot 10^{-j}, \\ y &= 0.6666\cdots = \sum_{j=1}^{\infty} 6 \cdot 10^{-j} \end{aligned}$$

haben. Die Summe ist

$$\begin{aligned} x + y &= \sum_{j=1}^{\infty} 3 \cdot 10^{-j} + \sum_{j=1}^{\infty} 6 \cdot 10^{-j} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} 9 \cdot 10^{-j} = 0.9999 \cdots. \end{aligned}$$

Andererseits ist $x + y = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$. □

2. Beweis. Hat x die Dezimalentwicklung

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} 9 \cdot 10^{-j} = 0.9999 \cdots,$$

so hat $10x$ die Dezimalentwicklung

$$\begin{aligned} 10x &= 10 \sum_{j=1}^{\infty} 9 \cdot 10^{-j} = \sum_{j=1}^{\infty} 9 \cdot 10^{-j+1} \\ &= 9 + \sum_{j=2}^{\infty} 9 \cdot 10^{-j+1} = 9 + \sum_{j=1}^{\infty} 9 \cdot 10^{-j} \\ &= 9.9999 \cdots \end{aligned}$$

Die Differenz $10x - x = 9x$ ist daher durch

$$10x - x = 9 + \sum_{j=1}^{\infty} 9 \cdot 10^{-j} - \sum_{j=1}^{\infty} 9 \cdot 10^{-j} = 9$$

gegeben. Also ist $x = 1$. □

3. Beweis. Aus der Summenformel für die geometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \qquad \text{für } |q| < 1$$

erhält man für $x = 0.9999 \cdots$

$$\begin{aligned} x &= \sum_{j=1}^{\infty} 9 \cdot 10^{-j} = \frac{9}{10} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^k \\ &= \frac{9}{10} \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = 1. \end{aligned} \qquad \square$$

4. Beweis. Betrachtet man die Zahlen

$$x_k = 0.999 \cdots 9 = \sum_{j=1}^{k} 9 \cdot 10^{-j},$$

so gilt sicherlich $x_k \leq 1$. Daher ist auch

$$x = 0.9999 \cdots = \lim_{k \to \infty} x_k \leq 1.$$

Angenommen, x wäre nicht 1, sondern kleiner als 1, dann gäbe es eine reelle Zahl y, z.B. $y = (x+1)/2$, die zwischen x und 1 liegt:

$$x < y < 1.$$

Dies müßte sich auch bei der Dezimalentwicklung von y widerspiegeln. Wegen $y < 1$ muß diese mit $y = 0.\cdots$ beginnen und kann wegen $x \neq y$ nicht nur aus 9-en bestehen. Daher gibt es eine Dezimalstelle von y, die kleiner ist als 9, was aber $y > x$ widerspricht. Die Annahme $x < 1$ ergibt einen Widerspruch. Demnach muß $x = 1$ sein. $\Box$.

3 Die Länge der Periode

Im ersten Abschnitt wurde gezeigt, daß genau die rationalen Zahlen eine periodische Dezimalentwicklung haben und daß die Länge der Periode immer kleiner ist als der Nenner. In diesem Abschnitt sollen nun die Längen der Vorperiode m und die der Periode l genau angegeben werden.

Dazu muß man nur den Beweis von Satz 1 ein wenig genauer betrachten. Übrigens heißt eine Dezimalzahl ohne Vorperiode **reinperiodisch**.

Satz 4 *Sei $x = \frac{p}{q}$ eine rationale Zahl in gekürzter Darstellung. Dann ist die Länge der Vorperiode m der Dezimalentwicklung von x das Maximum der Vielfachheiten von 2 bzw. 5 in der Primfaktorenzerlegung des Nenners q.*

Demnach hat eine rationale Zahl $x = \frac{p}{q}$ (in gekürzter Darstellung) genau dann eine reinperiodische Dezimalentwicklung, wenn der Nenner q weder durch 2 noch durch 5 teilbar ist.

Beweis. Zunächst betrachte man eine rationale Zahl x, deren Dezimalentwicklung Vorperiode der Länge m und Periode der Länge l hat, d.h.

$$x = 0\,.\,a_{-1}\cdots a_{-m}\overline{a_{-m-1}\cdots a_{-m-l}}.$$

(Da durch Addition bzw. Subtraktion ganzer Zahlen der Nenner nicht verändert wird, kann man sich auf rationale Zahlen $x = \frac{p}{q}$ mit $0 < x < 1$ beschränken.) Im Beweis von Satz 1 wurde gezeigt, daß x dann die Darstellung

$$x = \frac{Z}{N} = \frac{a_{-1}\cdots a_{-m}a_{-m-1}\cdots a_{-m-l} - a_{-1}\cdots a_{-m}}{10^m(10^l - 1)}$$

besitzt. Man beachte, daß der Nenner $N = 10^m(10^l - 1)$ die Primzahlen 2 und 5 genau mit Vielfachheit m besitzt, da der Faktor $10^l - 1$ weder durch 2 noch durch 5 teilbar ist. Weiters beachte man, daß $a_{-m} \neq a_{-m-l}$ sein muß, da sonst die Vorperiode verkürzt werden könnte. Daher ist der Zähler Z nicht durch 10 teilbar. Geht man nun von der Darstellung $x = \frac{Z}{N}$ zur gekürzten $x = \frac{p}{q}$ über, so kann daher nicht gleichzeitig durch 2 und durch 5 gekürzt werden. Die maximale Ordnung von 2 bzw. 5 in der Primfaktorenzerlegung von q ist daher wieder m.

Sei nun umgekehrt $x = \frac{p}{q}$ eine rationale Zahl in gekürzter Darstellung, wobei die maximale Ordnung von 2 bzw. 5 in der Primfaktorenzerlegung von q gleich m

ist. Durch Multiplikation mit 10^m, d.h. man betrachtet $x' = 10^m x = \frac{p'}{q'}$ können die Primfaktoren 2 und 5 des Nenners vollständig gekürzt werden, d.h. q' ist nun weder durch 2 noch durch 5 teilbar. Außerdem bewirkt die Multiplikation mit 10^m eine Verschiebung der Dezimalentwicklung:

$$\begin{aligned} x &= a_k \cdots a_0 \,.\, a_{-1} a_{-2} \cdots a_{-m} a_{-m-1} \cdots, \\ 10^m x &= a_k \cdots a_0 a_{-1} a_{-2} \cdots a_{-m} \,.\, a_{-m-1} a_{-m-2} \cdots. \end{aligned}$$

Das heißt, die Dezimalentwicklung von x hat genau dann eine Vorperiode der Länge m, wenn $x' = 10^m x$ reinperiodisch ist.

Es muß also nur mehr gezeigt werden, daß eine rationale Zahl $x = \frac{p}{q}$ mit der Eigenschaft, daß der Nenner q weder durch 2 noch durch 5 teilbar ist, reinperiodisch ist. (Wieder kann man sich auf den Fall $0 < x < 1$ beschränken.) Dazu betrachte man noch einmal die Divisionskette

$$\begin{aligned} 10p &= a_{-1} q + r_1 \qquad (0 \le r_1 < q) \\ 10r_1 &= a_{-2} q + r_2 \qquad (0 \le r_2 < q) \\ 10r_2 &= a_{-3} q + r_3 \qquad (0 \le r_3 < q) \\ &\vdots \end{aligned}$$

aus dem Beweis von Satz 1. Dort wurde beobachtet, daß die Kenntnis eines Restes r_j die weiteren Reste $r_{j+1}, r_{j+2}, \ldots$ und die Dezimalstellen $a_{-j-1}, a_{-j-2}, \ldots$ eindeutig bestimmt. Wenn q teilerfremd zu 10 ist, so wie in dem gerade betrachteten Fall, gilt auch die Umkehrung. Aus der Kenntnis eines Restes r_j lassen sich alle vorigen Reste $r_{j-1}, r_{j-2}, \ldots$ und natürlich die Ziffern $a_{-j+1}, a_{-j+2}, \ldots$ bestimmen. Dies folgt aus der folgenden Überlegung. Ist etwa r_3 bekannt, so folgt aus der Gleichung $10r_2 = a_{-3}q + r_3$

$$10r_2 \equiv r_3 \bmod q.$$

Da q zu 10 teilerfremd ist, hat diese Kongruenz eine eindeutige Lösung $r_2 \bmod q$. Wegen der Bedingung $0 \le r_2 < q$ ist r_2 dadurch eindeutig bestimmt. Daraus ergibt sich natürlich auch

$$a_{-3} = \frac{10r_2 - r_3}{q}$$

etc. Die Reste $r_1, r_2, r_3, \ldots$ bilden daher eine reinperiodische Folge, womit die Dezimalstellen $a_{-1}, a_{-2}, a_{-3}, \ldots$ auch reinperiodisch sein müssen. □

Satz 5 *Sei $x = \frac{p}{q}$ die gekürzte Darstellung einer rationalen Zahl und $q = 2^{m_1} 5^{m_2} q'$, wobei q' weder durch 2 noch durch 5 teilbar ist. Dann ist die Länge der Periode der Dezimalentwicklung von x genau l, wenn*

$$q' \nmid 10 - 1,\ q' \nmid 10^2 - 1,\ \ldots,\ q' \nmid 10^{l-1} - 1,$$

aber

$$q' | 10^l - 1.$$

Beweis. Wegen der Zerlegung $q = 2^{m_1}5^{m_2}q'$ hat $x = \frac{p}{q}$ eine Vorperiode der Länge $m = \max(m_1, m_2)$, und die Zahl $x' = 10x = \frac{p'}{q'}$ ist reinperiodisch mit derselben Periodie wie x. Es genügt also, x' zu betrachten, und da die Addition bzw. Subtraktion ganzer Zahlen weder Auswirkung auf die Periode noch auf den Nenner hat, kann man sogar $0 < x' < 1$ fordern.

Ist nun k die Länge einer Periode der Dezimalentwicklung von $x' = \frac{p'}{q'}$, d.h.

$$x' = 0\,.\,\overline{a_{-1}a_{-2}\cdots a_{-k}},$$

dann gilt

$$x' = \frac{a_{-1}a_{-2}\cdots a_{-k}}{10^k - 1}.$$

Die gekürzte Darstellung von x ist $\frac{p'}{q'}$, also muß q' ein Teiler von $10^k - 1$ sein:

$$q' | 10^k - 1.$$

Ist andererseits q' ein Teiler von $10^k - 1$ für ein $k \geq 1$, so kann x' in der Gestalt

$$x' = \frac{p'}{q'} = \frac{p'\frac{10^k-1}{q'}}{10^k - 1} = \frac{Z}{10^k - 1}$$

dargestellt werden, wobei Z eine natürliche Zahl $< q' \leq 10^k - 1$ ist. Sind $b_{k-1}, b_{k-2}, \ldots, b_0$ die Ziffern von Z, d.h.

$$Z = b_{k-1}10^{k-1} + b_{k-2}10^{k-2} + \cdots + b_0 = b_{k-1}b_{k-2}\cdots b_0,$$

so bildet $b_{k-1}b_{k-2}\cdots b_0$ eine Periode der Dezimalentwicklung von x':

$$x' = 0\,.\,\overline{b_{k-1}b_{k-2}\cdots b_0}.$$

Daher muß die kleinstmögliche Länge einer Periode, also l, die im Satz formulierten Bedingungen erfüllen. □

Dieser Satz gibt uns auch die Möglichkeit, jene rationale Zahlen $x = \frac{p}{q}$ zu charakterisieren, deren Periodenlänge l größtmöglich, also $l = q - 1$ ist.

Satz 6 *Die Länge der Periode der Dezimalentwicklung einer rationalen Zahl $x = \frac{p}{q}$ ist genau dann $q - 1$, wenn q eine Primzahl ist, die von 2 und 5 verschieden ist und die Bedingungen*

$$q \nmid 10 - 1,\ q \nmid 10^2 - 1,\ \ldots,\ q \nmid 10^{q-2} - 1 \tag{1}$$

erfüllt sind.

Beweis. Wenn q eine Primzahl ungleich 2 und 5 ist, die (1) erfüllt hat $x = \frac{p}{q}$ wegen Satz 5 sicherlich Periodenlänge $l \geq q - 1$. Da die Periodenlänge immer $l \leq q - 1$ sein muß, folgt $l = q - 1$.

Sei nun andererseits $x = \frac{p}{q}$ eine rationale Zahl, deren Periodenlänge $l = q - 1$ ist. Dann muß einerseits $x = \frac{p}{q}$ in durchgekürzter Darstellung vorliegen und die Dezimalentwicklung reinperiodisch sein. (Anderfalls wäre die Periodenlänge sicherlich

$< q-1$.) q ist daher weder durch 2 noch durch 5 teilbar. Aus dem kleinen Fermatschen Satz folgt daher

$$q \mid 10^{\varphi(q)} - 1,$$

wobei $\varphi(q)$ die Eulersche φ-Funktion bezeichnet. Ist

$$q = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_k^{r_k}$$

die Primfaktorenzerlegung von q, so berechnet sich die Eulersche φ-Funktion zu

$$\varphi(q) = p_1^{r_1-1}(p_1-1)p_2^{r_2-1}(p_2-1)\cdots p_k^{r_k-1}(p_k-1).$$

Insbesondere gilt für Primzahlen $\varphi(q) = q-1$ und für Nichtprimzahlen $\varphi(q) < q-1$. Damit ist für Nichtprimzahlen q die Periodenlänge sicherlich durch

$$l \leq \varphi(q) < q-1$$

beschränkt. Daher muß im Fall maximaler Periodenlänge der Nenner von $x = \frac{p}{q}$ eine Primzahl sein. Die Bedingungen (1) ergeben sich schließlich direkt aus Satz 5. □

Die Bedingungen (1) aus Satz 6 scheinen sehr einschränkend zu sein. Umso überraschender ist es, daß es offensichtlich viele Primzahlen q gibt, die diese Bedingungen erfüllen. Bis 100 sind dies beispielsweise die Primzahlen

$$7,\ 17,\ 19,\ 23,\ 29,\ 47,\ 59,\ 61,\ 97.$$

Die Dezimalentwicklungen von $x = \frac{1}{q}$ sind durch

$$\begin{aligned}
\frac{1}{7} &= 0.\overline{142857}, \\
\frac{1}{17} &= 0.\overline{0588235294117647}, \\
\frac{1}{19} &= 0.\overline{052631578947368421}, \\
\frac{1}{23} &= 0.\overline{0434782608695652173913}, \\
\frac{1}{29} &= 0.\overline{0344827586206896551724137931}, \\
\frac{1}{47} &= 0.\overline{0212765957446808510638297872340425531914893617}, \\
\frac{1}{59} &= 0.\overline{01694915254237288135593220338} \\
&\quad\ \overline{98305084745762711864406779661}, \\
\frac{1}{61} &= 0.\overline{016393442622950819672131147540} \\
&\quad\ \overline{983606557377049180327868852459}, \\
\frac{1}{97} &= 0.\overline{010309278350515463917525773195876288659793814432} \\
&\quad\ \overline{989690721649484536082474226804123711340206185567}.
\end{aligned}$$

Die Bedingugen (1) aus Satz 6 können auch anders formuliert werden, nämlich, daß

$$10 \not\equiv 1 \mod q,\ 10^2 \not\equiv \mod q, \ldots, 10^{q-2} \not\equiv 1 \mod q$$

gilt. Wegen des kleinen Fermatschen Satzes ist überdies

$$10^{q-1} \equiv 1 \mod q.$$

Das bedeutet, daß $a = 10$ **Primitivwurzel** modulo q ist. Es ist wohlbekannt, daß es, wenn q eine Primzahl ist, unter den Zahlen $1, 2, \ldots, q-1$ genau $\varphi(q-1)$ Primitivwurzeln a gibt, d.h.

$$a \not\equiv 1 \mod q,\ a^2 \not\equiv \mod q, \ldots, a^{q-2} \not\equiv 1 \mod q$$

und

$$a^{q-1} \equiv 1 \mod q.$$

Damit kann man aber nicht ablesen, wie oft eine konkrete Zahl a (z.B. $a = 10$) Primitivwurzel ist. Es wird vermutet (**Artinsche Vermutung**), daß es zu jeder natürlichen Zahl $a \geq 2$ unendlich viele Primzahlen q gibt, für die a Primitivwurzel ist. Es wird nicht daran gezweifelt, daß diese Vermutung richtig ist. Man kann daher mit großer Sicherheit davon ausgehen, daß $a = 10$ für unendlich viele Primzahlen Primitivwurzel ist, bzw. daß es unendliche viele Primzahlen q gibt, für die die Periode der Dezimalentwicklung von $x = \frac{p}{q}$ maximale Länge $q - 1$ hat. Wenn sogar eine etwas weitergehende Vermutung korrekt ist, hat sogar (im Durchschnitt) etwa jede dritte Primzahl diese Eigenschaft, es scheint, als wäre maximale Periodenlänge ein durchaus häufiges Phänomen zu sein.

Die Periode der Dezimalentwicklung von rationalen Zahlen mit maximaler Periodenlänge birgt noch eine Reihe von Merkwürdigkeiten. Dies soll zunächst am Beispiel des Nenners $q = 7$ demonstriert werden. Dazu betrachte man die zunächst die Dezimalentwicklungen der Zahlen $\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \ldots, \frac{6}{7}$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{7} &= 0.\overline{142857},\\
\frac{2}{7} &= 0.\overline{285714},\\
\frac{3}{7} &= 0.\overline{428571},\\
\frac{4}{7} &= 0.\overline{571428},\\
\frac{5}{7} &= 0.\overline{714285},\\
\frac{6}{7} &= 0.\overline{857142}.
\end{aligned}$$

Es fällt auf, daß bei den Perioden nicht nur dieselben Ziffern auftreten, sondern daß sie durch **zyklische Vertauschung** der erste Periode 142857 hervorgehen. Dies gilt ganz allgemein.

Satz 7 *Sei* $a_{-1}a_{-2}\cdots a_{-q+1}$ *die Periode der Dezimalentwicklung von* $x = \frac{1}{q}$, *wobei* q *eine Primzahl ist, für die* 10 *Primitivwurzel ist. Dann entsteht die Periode der Dezimalentwicklung der rationalen Zahlen* $\frac{p}{q}$ $(1 \leq p \leq q-1)$ *durch zyklische Vertauschung* *von $a_{-1}a_{-2}\cdots a_{-q+1}$, wobei jede Ziffer a_{-j} $(1 \le j \le q-1)$ genau einmal an erster Stelle steht.*

Beweis. Periodische Dezimalentwicklungen mit maximaler Periode zeichnen sich dadurch aus, daß in der Divisionskette

$$\begin{aligned} 10 &= a_{-1}q + r_1 && (0 \le r_1 < q) \\ 10r_1 &= a_{-2}q + r_2 && (0 \le r_2 < q) \\ 10r_2 &= a_{-3}q + r_3 && (0 \le r_3 < q) \\ &\vdots \end{aligned}$$

zur Berechnung der Dezimalentwicklung $0.a_{-1}a_{-2}\cdots$ von $x = \frac{1}{q}$ die Reste $r_1, r_2, \ldots, r_{q-1}$ genau die Zahlen $1, 2, \ldots, q-1$ sind.

Sei nun $1 \le p \le q-1$ und $1 \le j_0 \le q-1$ jener Index mit

$$r_{j_0} = p.$$

Bestimmt man nun die Reste r'_j in der Divisionskette

$$\begin{aligned} 10p &= a'_{-1}q + r'_1 && (0 \le r'_1 < q) \\ 10r'_1 &= a'_{-2}q + r'_2 && (0 \le r'_2 < q) \\ 10r'_2 &= a'_{-3}q + r'_3 && (0 \le r'_3 < q) \\ &\vdots \end{aligned}$$

zur Bestimmung der Dezimalentwicklung $0.a'_{-1}a'_{-2}\cdots$ von $\frac{p}{q}$, so gilt offensichtlich

$$a'_{-1} = a_{-j_0-1} \quad \text{und} \quad r'_1 = r_{j_0+1}$$

und damit für alle $k \ge 1$

$$a'_{-k} = a_{-j_0-k} \quad \text{und} \quad r'_k = r_{j_0+k}.$$

Damit geht die Periode $a'_{-1}a'_{-2}\cdots a'_{-q+1}$ von $\frac{p}{q}$ durch zyklische Vertauschung der Periode $a_{-1}a_{-2}\cdots a_{-q+1}$ von $x = \frac{1}{q}$ hervor. Da alle Zahlen $\frac{p}{q}$ $(1 \le p \le q-1)$ voneinander verschieden sind, müssen auch die Dezimalentwicklungen voneinander verschieden sein, jede Ziffer aus der Periode $a_{-1}a_{-2}\cdots a_{-q+1}$ von $x = \frac{1}{q}$ kommt daher genau einmal an die erste Stelle. □

Die Perioden der Brüche $\frac{p}{q}$ $(1 \le p \le q-1)$ können daher auch zur Aufstellung eines (fast) magischen Quadrats verwendet werden. Zum Beispiel sind die Zeilen- und Spaltensummen des Schemas

1	4	2	8	5	7
2	8	5	7	1	4
4	2	8	5	7	1
5	7	1	4	2	8
7	1	4	2	8	5
8	5	7	1	4	2

alle gleich 27, da in jeder Zeile und Spalte dieselben Zahlen stehen. Die Summe der Elemente der Hauptdiagonale ist 31, wogegen die der Nebendiagonale 23 ist, d.h. es ist nicht wirklich ein magisches Quadrat, allerdings ist der arithmetische Mittelwert von 31 und 23 wieder $27 = \frac{1}{2}(31 + 23)$. Führt man dasselbe Verfahren bei $q = 19$ durch, ergibt sich sogar ein Quadrat, wo beide Diagonalsummen gleich den Spalten- bzw. Zeilensummen sind.

Bei der Betrachtung der Periode 142857 von $x = \frac{1}{7}$ fällt auf, daß $28 = 2 \cdot 14$ und $57 = 2 \cdot 28 + 1$ ist, also eine gewisse *Regelmäßigkeit* vorliegt. Das ist offensichtlich kein Zufall, denn verdoppelt man 14 sukzessive und addiert die Ergebnisse jeweils um 2 Stellen nach rechts versetzt, so entsteht tatsächlich die Dezimalentwicklung von $x = \frac{1}{7}$:

$$\begin{array}{cccccccc}
14 & & & & & & & \\
 & 28 & & & & & & \\
 & & 56 & & & & & \\
 & & 1 & 12 & & & & \\
 & & & 2 & 24 & & & \\
 & & & & 4 & 48 & & \\
 & & & & & 8 & 96 & \\
 & & & & & & 17 & 92 \\
 & & & & & & & \dots \\
\hline
14 & 28 & 57 & 14 & 28 & 57\cdots & &
\end{array}$$

Eine Begründung diese *Phänomens* ist leicht zu geben. Interpretiert man diese Addition als Addition von Dezimalzahlen, so folgt mittels der Summenformel für die geometrische Reihe daß die Summe $\frac{1}{7}$ ist:

$$\begin{aligned}
14 \cdot 10^{-2} + 2 \cdot 14 \cdot 10^{-4} + 2^2 \cdot 14 \cdot 10^{-6} + \cdots &= \frac{14}{100}\left(1 + \frac{2}{100} + \left(\frac{2}{100}\right)^2 + \cdots\right) \\
&= \frac{14}{100}\,\frac{1}{1 - \frac{2}{100}} = \frac{1}{7}.
\end{aligned}$$

In ähnlicher Weise können die Potenzen von 3 addiert werden, und man gelangt wieder zur Dezimalentwicklung von $\frac{1}{7}$:

$$\begin{array}{cccccccccc}
1 & & & & & & & & & \\
 & 3 & & & & & & & & \\
 & & 9 & & & & & & & \\
 & & 2 & 7 & & & & & & \\
 & & & 8 & 1 & & & & & \\
 & & & 2 & 4 & 3 & & & & \\
 & & & & 7 & 2 & 9 & & & \\
 & & & & 2 & 1 & 8 & 7 & & \\
 & & & & & 6 & 5 & 6 & 1 & \\
 & & & & & 1 & 9 & 6 & 8 & 3 \\
\hline
1 & 4 & 2 & 8 & 5 & 7 & & & &
\end{array}$$

Wieder gelingt der Nachweis mit Hilfe durch Interpretation dieser Addition als Addition von Dezimalzahlen:

$$\begin{aligned} 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-2} + 3^2 \cdots 10^{-3} + \cdots &= \frac{1}{10}\left(1 + \frac{3}{10} + \left(\frac{3}{10}\right)^2 + \cdots\right) \\ &= \frac{1}{10}\frac{1}{1 - \frac{3}{10}} = \frac{1}{7}. \end{aligned}$$

Betrachtet man die oben angeführten Dezimalentwicklungen der Zahlen $\frac{1}{7}, \frac{1}{17}, \frac{1}{19}, \ldots$, so fällt auf, daß bei Unterreilung der Periode in zwei gleich lange Blöcke der zweite Block durch *Spiegelung* des ersten ensteht, das soll heißen, die entsprechenden Ziffern ergänzen einander auf 9:

$$\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}, \quad 1+8=9,\ 4+5=9,\ 2+7=9.$$

Dieses Phänomen tritt aber nicht nur bei periodischen Dezimalentwicklungen mit maximaler Länge auf:

$$\frac{1}{13} = 0.\overline{076923}, \quad 0+9=9,\ 7+2=9,\ 6+3=9.$$

Tatsächlich gilt dies immer, wenn der Nenner eine Primzahl ist und die Periode gerade Länge hat.

Satz 8 *Ist q eine Primzahl verschieden von 2 und 5 und $1 \leq p \leq q-1$ und ist die Länge l der Periode der Dezimalentwicklung von $x = \frac{p}{q}$ gerade, dann ergänzen einander die j-te Dezimalstelle a_{-j} mit der $(j + \frac{l}{2})$-ten Dezimalstelle $a_{-j-(l/2)}$ für alle $j \geq 1$ auf 9:*

$$a_{-j} + a_{-j-(l/2)} = 9.$$

Beweis. Wegen Satz 7 muß diese Eigenschaft nur für $x = \frac{1}{q}$ gezeigt werden, und hier reicht es zu zeigen, daß für die Dezimalstellen a_{-j} $(1 \leq j \leq l)$ der Periode

$$a_{-1} + a_{-1-(l/2)} = a_{-2} + a_{2-(l/2)} = \cdots a_{-(l/2)} + a_{-l} = 9$$

gilt. Wegen

$$\frac{1}{q} = \frac{a_{-1}a_{-2}\cdots a_{-l}}{10^l - 1}$$

ist auch

$$q \cdot (a_{-1}a_{-2}\cdots a_{-l}) = 10^l - 1 = (10^{l/2} - 1)(10^{l/2} + 1).$$

Da l die Periodenlänge ist, gilt sicherlich $q \not| 10^{l/2} - 1$. Da q eine Primzahl ist, muß daher $a_{-1}a_{-2}\cdots a_{-l}$ ein Vielfaches von $10^{l/2} - 1$ sein. Es gibt daher ein $k < 10^{l/2}$ mit

$$a_{-1}a_{-2}\cdots a_{-l} = k(10^{l/2} - 1).$$

Nun besagt Satz 11 des nächsten Abschnitts gerade, daß die Ziffern von Vielfachen von $10^m - 1$ gerade die geforderte Eigenschaft besitzen. □

4 $x = 10^k - 1 = 99\cdots 9$

Zahlen, derer Ziffern alle 9 sind, beinhalten besonders viele Merkwürdigkeiten. Einige davon sollen in diesem Abschnitt vorgestellt werden. Betrachtet man etwa die Primfaktorenzerlegungen von den Zahlen $999\cdots 9 = 10^k - 1$:

$$
\begin{aligned}
9 &= 3^2 & 10^7 - 1 &= 3^2 \cdot 239 \cdot 4649 \\
99 &= 3^2 \cdot 11 & 10^8 - 1 &= 3^2 \cdot 11 \cdot 73 \cdot 101 \cdot 137 \\
999 &= 3^3 \cdot 37 & 10^9 - 1 &= 3^4 \cdot 37 \cdot 333667 \\
10^4 - 1 &= 3^2 \cdot 11 \cdot 101 & 10^{10} - 1 &= 3^2 \cdot 11 \cdot 41 \cdot 271 \cdot 9091 \\
10^5 - 1 &= 3^2 \cdot 41 \cdot 271 & 10^{11} - 1 &= 3^2 \cdot 21649 \cdot 513239 \\
10^6 - 1 &= 3^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37 & 10^{12} - 1 &= 3^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37 \cdot 101 \cdot 9901,
\end{aligned}
$$

so häufen sich zwar gewisse Primteiler, es treten aber immer neue auf. Tatsächlich treten alle möglichen Teiler irgendwann einmal auf.

Satz 9 *Zu jeder natürlichen Zahl q, die weder durch 2 noch durch 5 teilbar ist, gibt es ein k, so daß q Teiler von $10^k - 1 = 999\cdots 9$ ist.*

Beweis. Ist $a_{-1}a_{-2}\cdots a_{-l}$ die Periode der Dezimalentwicklung der rationalen Zahl $x = \frac{1}{q}$, so ist auch

$$x = \frac{1}{q} = \frac{a_{-1}a_{-2}\cdots a_{-l}}{10^l - 1}$$

bzw.

$$q \cdot (a_{-1}a_{-2}\cdots a_{-l}) = 10^l - 1.$$

Daher ist q ein Teiler von $10^l - 1$. Man kann daher $k = l$ setzen. □

Beispielsweise ist 7 ein Teiler von $10^6 - 1 = 999999$ und es gilt

$$7 \cdot 142857 = 999999.$$

Also ist auch 142857 ein Teiler von 999999. Quadriert man diese Zahl und teilt man die Ziffern des Resultats in zwei Blöcke der Länge 6, so ist die Summe dieser Blöcke wieder 142857:

$$142857^2 = 20408\,122449 \quad \text{und} \quad 20408 + 122449 = 142857.$$

Diese Eigenschaft ist interessanterweise für sehr viele Zahlen erfüllt.

Satz 10 *Ist q ein Teiler von $10^k - 1$ und stellt man das Quadrat von q durch*

$$q^2 = a10^k + b \quad \textit{mit} \quad 0 \le b < 10^k$$

dar, dann ist q ein Teiler von $a + b$.

Beweis. Mit der Festlegung $10^k - 1 = pq$ erhält man

$$q^2 = a10^k + b = a(qp + 1) + b = (a + b) + apq$$

bzw.

$$a + b = q(q - ap).$$

Also ist $a + b$ durch q teilbar. □

Insbesondere ist $a + b = q$, wenn $q - a(10^k - 1)/q = 1$ ist. Dies ist bei $q = 142857$ und $k = 6$ der Fall.

Schließlich betrachte man die Vielfachen von $999 \cdots 9 = 10^k - 1$, etwa im Fall $k = 3$:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 1 \cdot 999 &=& 999 & \qquad & 537 \cdot 999 &=& 536\,463 \\ 2 \cdot 999 &=& 1\,998 & & 712 \cdot 999 &=& 711\,288 \\ 3 \cdot 999 &=& 2\,997 & & 999 \cdot 999 &=& 998\,001 \\ 58 \cdot 999 &=& 57\,942 & & 1238 \cdot 999 &=& 1\,236\,762 \\ 143 \cdot 999 &=& 142\,857 & & 2457 \cdot 999 &=& 2\,454\,543 \end{array}$$

Es fällt auf, daß die Ziffernsumme bei allen Vielfachen 27 beträgt. Weiters haben die Vielfachen bis 999 die Eigenschaft, daß sich die erste und die vierte Ziffer, die zweite und die fünfte und schließlich die dritte und die sechste Ziffer auf 9 ergänzen. (Daraus folgt natürlich auch, daß die Ziffernsumme in diesen Fällen 27 ist.) Bei den Vielfachen > 1000 ist keine derartige Struktur erkennbar. Daß die Ziffernsumme wiederum oft 27 ist, liegt daran, daß sie bei Vielfachen von $999 = 9 \cdot 111$ immer durch 9 teilbar sein muß und bei 6 bis 7 Dezimalstellen die *erwartete* Ziffernsumme eben 27 ist.

Satz 11 *Unterteilt man die Ziffern $a_{2k-1} \cdots a_k a_{k-1} \cdots a_0$ von $l \cdot (10^k - 1)$ für $1 \le l \le 10^k$ in zwei Blöcke der Länke k, so ergänzen die entsprechenden Ziffern dieser beiden Blöcke jeweils auf 9:*

$$a_0 + a_k = a_1 + a_{k+1} = \cdots = a_{k-1} + a_{2k-1} = 9.$$

Insbesondere ist die Ziffernsumme aller dieser Zahlen $9k$.

Beweis. Aus der Gleichung

$$l \cdot (10^k - 1) = (l - 1)10^k + ((10^k - 1) - (l - 1))$$

erkennt man, daß die Ziffern $(l - 1)$ die Ziffern $a_{2k-1} \cdots a_k$ und $(10^k - 1) - (l - 1)$ die Ziffern $a_{k-1} \cdots a_0$ hat. Wegen $(l - 1) + (10^k - 1) - (l - 1) = 10^k - 1$ ergänzen einander die Ziffern von $l - 1$ und $(10^k - 1) - (l - 1)$ entsprechend auf 9. □

Es gibt noch viele ähliche Phänomene dieser Art. Beispielsweise ist

$$666^2 = 443\,556 \quad \text{und} \quad 443 + 556 = 999$$

und

$$222^2 = 49\,284 \quad \text{und} \quad 49 + 284 = 333.$$

Eine genauere Studie sei aber an dieser Stelle dem Leser überlassen.

5 Die Gleichung $x^2 = x$

In den ganzen Zahlen hat die Gleichung $x^2 = x$ nur die Lösungen $x = 0$ und $x = 1$. Verzichtet man zunächst einmal auf die exakte Erfüllung diese Gleichung, sondern fordert man nur, daß gewisse Ziffern von x und x^2 übereinstimmen, so kann man weitere *Lösungen* finden. Beispielsweise ist $6^2 = 36$. Die erste Stelle von $x = 6$ und $x^2 = 36$ stimmen überein. (Dies ist übrigens auch für $x = 5$ und $x^2 = 25$ der Fall.) Tatsächlich findet man ausgehend von diesen beiden Beispielen noch weitere Zahlen x, bei denen nicht nur die Einerstelle von x und x^2 übereinstimmen. Nach kurzer Suche findet man $x = 76$. Hier ist $x^2 = 5776$. Es stimmen also die ersten beiden Stellen überein. Bei $x = 376$ ist $x^2 = 141376$, und es stimmen die ersten drei Stellen überein:

$$
\begin{array}{rcr}
6^2 & = & 36 \\
76^2 & = & 5776 \\
376 & = & 141376 \\
9376 & = & 87909376 \\
09376 & = & 87909376 \\
109376 & = & 11963109376 \\
7109376 & = & 50543227109376 \\
\vdots & & \vdots
\end{array}
$$

Tatsächlich findet man immer genau eine *Fortsetung* der gerade gefundenen *Lösung*, wo eine zusätztliche Stelle übereinstimmt.

Satz 12 *Sei $a_0 = 6$ und $x = a_{k-1} \cdots a_1 a_0$ derart, daß die ersten die Stellen von x mit den ersten k Stellen von x^2 übereinstimmen:*

$$(a_{k-1}a_{k-2}\cdots a_1a_0)^2 = b_{2k-1}b_{2k-2}\cdots b_{k+1}b_k a_{k-1}a_{k-2}\cdots a_1 a_0,$$

Setzt man im Fall $b_k = 0$ $a_k = 0$ und im Fall $b_k \neq 0$ $a_k = 10 - b_k$, so hat die Zahl $y = a_k a_{k-1}\cdots a_1 a_0$ die Eigenschaft, daß die ersten $(k+1)$ Stellen von y^2 mit denen von y übereinstimmen:

$$(a_k a_{k-1}\cdots a_1 a_0)^2 = \cdots a_k a_{k-1}\cdots a_1 a_0.$$

Beweis. Die Zahl $a = a_k a_{k-1} \cdots a_1 a_0$ hat die Eigenschaft

$$a^2 \equiv a \bmod 10^k.$$

Es ist nun ein b, $0 \leq b \leq 9$, gesucht mit

$$(a + 10^k b)^2 \equiv a + 10^k b \bmod 10^{k+1}.$$

Wegen $(a + 10^k b)^2 = a^2 + 2ab10^k + b^2 10^{2k} \equiv a^2 + 2ab10^k \bmod 10^{k+1}$ muß daher

$$a^2 + 2ab10^k \equiv a + 10^k b \bmod 10^{k+1}$$

oder

$$-\frac{a^2 - a}{10^k} \equiv b(2a-1) \bmod 10$$

erfüllt sein. Nun ist aber für $2a - 1 \equiv 1 \mod 10$ (bei $a_0 = 6$) und

$$\frac{a^2 - a}{10^k} \equiv b_k \mod 10.$$

Daher muß man b so wählen, daß $b \equiv -b_k \mod 10$ ist. □

Für $a_0 = 5$ gibt es eine entsprechende Eigenschaft:

Satz 13 *Sei $a_0 = 5$ und $x = a_{k-1} \cdots a_1 a_0$ derart, daß die ersten die Stellen von x mit den ersten k Stellen von x^2 übereinstimmen:*

$$(a_{k-1}a_{k-2} \cdots a_1 a_0)^2 = b_{2k-1}b_{2k-2} \cdots b_{k+1}b_k a_{k-1}a_{k-2} \cdots a_1 a_0,$$

Setzt man $a_k = b_k$, so hat die Zahl $y = a_k a_{k-1} \cdots a_1 a_0$ die Eigenschaft, daß die ersten $(k+1)$ Stellen von y^2 mit denen von y übereinstimmen:

$$(a_k a_{k-1} \cdots a_1 a_0)^2 = \cdots a_k a_{k-1} \cdots a_1 a_0.$$

Beweis. Der einzige Unterschied zum Beweis von Satz 12 ist daß hier wegen $a_0 = 5$ $2a - 1 \equiv -1 \mod 10$ ist und daher $b \equiv b_k \mod 10$, also $b = b_k$ gewählt werden muß. □

Es kann also ausgehend von 6 (bzw. 5) die Gleichung $x^2 = x$ *immer besser* erfüllt werden. In jedem Schritt kann man die Anzahl der gleichen Dezimalstellen vergrößern. Der absolute Fehler wird zwar bei diesem Prozeß auch immer größer, dieser Fehler *verschwindet* aber, wenn man formal den Grenzübergang $k \to \infty$ überführt. Dies führt zum Begriff einer unendlich großen Dezimalzahl.

Definition 2 *Eine formale Reihe der Form*

$$Z = a_0 + a_1 10 + a_1 0^2 + \cdots = \sum_{j=0}^{\infty} a_j 10^j$$

mit $a_j \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ heißt **unendlich große Dezimalzahl.**

Diese formalen Reihen bilden eine Erweiterung der natürlichen Zahlen. Man kann sogar die Addition (mit Übertrag) und die Multiplikation solcher formaler Reihen wie bei natürlichen Zahlen durchführen. (In Anlehnung an den Begriff der p-adische Zahlen - mit einer Primzahl p - könnte man die unendlich großen Dezimalzahlen auch als **10-adische Zahlen** bezeichnen.)

Die aus dem obigen Prozeß gebildete *Zahl* (siehe Satz 12)

$$X = \cdots 7109376$$

ist etwa eine unendlich groß Dezimalzahl, die die Gleichung $x^2 = x$ erfüllt. Der Prozeß aus Satz 12 kann beliebig oft durchgeführt werden. Eine genauere Entwicklung von X ist

$$X = \cdots 38909958933800226077437499817871093 76.$$

Beginnt man statt mit $a_0 = 6$ mit $a_0 = 5$, so sichert Satz 13 die Existenz einer weiteren unendliche großen Dezimalzahl Y mit $Y^2 = Y$:

$$Y = \cdots 61090041066299773922562599182128906 25.$$

Es fällt auf, daß sich hier (bis auf die erste Stelle) alle entsprechenden Ziffern von X und Y auf 9 ergänzen. Addiert man also X und Y (mit Übertrag), so ergibt sich schließlich

$$X + Y = \cdots 0001 = 1.$$

Der Beweis dieser Eigenschaft ist überraschen einfach. (In der Formulierung des folgenden Satzeswerden die natürlichen Zahlen $0 = \cdots 0000$ und $1 = \cdots 0001$ als unendlich groß e Dezimalzahlen interpretiert.)

Satz 14 0, 1, X, Y *sind die einzigen unendlich großen Dezimalzahlen, die Lösungen der Gleichung* $x^2 = x$ *sind. Es gilt auch* $X + Y = 1$.

Beweis. Für eine unendlich große Dezimalzahl

$$Z = \cdots a_3 a_2 a_1 a_0,$$

die die Gleichung $x^2 = x$ erfüllt, muß auch

$$a_0^2 \equiv a_0 \bmod 10$$

gelten. Es gibt also vier Möglichkeiten: $a_0 = 0, 1, 5, 6$. Aus dem Beweis des Satzes 12 folgt, daß man eine Lösung der Gleichung $x^2 = x$ allein aus der Kenntnis von a_0 eindeutig rekonstruieren kann. Daher sind 0, 1, X, Y die einzigen Lösungen.

Andererseits kann man aus einer Lösung Z der Gleichung $x^2 = x$ sofort eine weitere Lösung konstruieren, nämlich $Z' = 1 - Z$. Aus $Z^2 = Z$ folgt nämlich

$$(1 - Z)^2 = 1 - 2Z + Z^2 = 1 - 2Z + Z = 1 - Z.$$

Da es nur die vier Lösungen 0, 1, X, Y gibt, muß $Y = 1 - X$ sein. □

Die Eigenschaft $X + Y = 1$ hat eine interessante Folgerung.

Satz 15 *Die unendlich großen Dezimalzahlen* X, Y, $Z = 1$ *erfüllen für alle* $m \geq 1$ *die* **Fermatgleichung**

$$X^m + Y^m = Z^m.$$

Beweis. Aus $X^2 = X$ folgt natürlich auch

$$X^3 = X \cdot X^2 = X \cdot X = X^2 = X$$

und induktiv für alle $m \geq 1$ $X^m = X$. Ebenso ist $Y^m = Y$ und daher

$$X^m + Y^m = X + Y = 1 = 1^m = Z^m. \qquad \square$$

In den Ziffernentwicklungen von X und Y kann (noch) keine Regelmäßigkeit abgelesen werden. (Immerhin kann man erkennen, daß alle möglchen Ziffern zwichen 0 und 9 auftreten.) Tatsächlich sind diese Dezimalentwicklungen nicht periodisch.

Satz 16 *Die Ziffernentwicklung der unendlich großen Dezimalzahlen X und Y sind nicht periodisch.*

Beweis. Zunächst betrachte man die unendlich große Dezimalzahl

$$E = \cdots 9999 = \overline{9}.$$

Addiert man zu E die Zahl 1, so erkennt man, daß (wegen des Übertrags) die Summe $E + 1 = 1 + E = 0$ ist. Das bedeutet, daß E die Rolle von -1 spielt. Entsprechend gibt es zu jeder unendlich groß en Dezimalzahl U die Zahl $E \cdot U$, die die Eigenschaft $U + E \cdot U = E \cdot U + U = 0$ hat. $E \cdot U$ spielt daher die Rolle von $-U$ (und soll im folgenden auch so bezeichnet werden). Man kann daher unendlich große Dezimalzahlen uneingeschränkt addieren und subtrahieren. (Gemeinsam mit der Multiplikation bilden die unendlich großen Dezimalzahlen einen Ring.) Man kann sich sogar überlegen, daß es zu einer unendlich großen Dezimalzahl $Z = \cdots a_1 a_0$ mit ungeradem a_0 ungleich 5 eine unendliche Dezimalzahl Z' mit $ZZ' = Z'Z = 1$ gibt, also ein Element, das die Rolle des Kehrwertes $1/Z$ spielt. Die unendlich großen Dezimalzahlen beinhalten also auch alle rationalen Zahlen $\frac{p}{q}$, deren Nenner q zu 10 teilerfremd ist. Diese rationalen Zahlen haben wieder eine periodische (unendliche große) Dezimalentwicklung. Der Nachweis gelingt wieder durch eine (modifizierten) Divisionsalgorithmus. Wir benötigen aber nur die Eigenschaft, daß eine unendlich große periodische Dezimalzahl eine rationale Zahl repräsentiert.

Es sei also

$$Z = \overline{a_{m+l-1} \cdots a_m} a_{m-1} \cdots a_0$$

eine unendlich große periodische Dezimalzahl mit Vorperiode der Länge m und Periode der Länge l. Dann ist

$$10^l Z = \overline{a_{m+l-1} \cdots a_m} a_{m-1} \cdots a_0 0 \cdots 0$$

und

$$Z - 10^l Z = a_{m+l-1} \cdots a_m a_{m-1} \cdots a_0 \; - \; a_{m-1} \cdots a_0 0 \cdots 0 = n$$

eine natürliche Zahl. Also repräsentiert x die rationale Zahl

$$Z = -\frac{n}{10^l - 1} = \frac{p}{q}.$$

Es sei nun $Z \neq 0$ Lösung der Gleichung $x^2 = x$ mit periodischer Dezimalentwicklung, d.h. es gibt ganze Zahlen p, q mit $qZ = p$. Für diese gilt dann

$$p^2 = q^2 Z^2 = q^2 Z = q(qZ) = qp.$$

Da $p \neq 0$ ist, müssen p und q gleich sein, also $Z = 1$. Daher können die Dezimalentwicklungen von X und Y nicht periodisch sein. □

6 Normale Zahlen

Im vorigen Abschnitt wurde gezeigt, daß die unendlichen Ziffernentwicklungen von X und Y nicht periodisch sind. Man kann daher a-priori keine genaue Auskunft über die

Verteilung der Ziffern geben. Es wurde zwar (durch Nachrechnen) nachgewiesen, daß alle möglichen Ziffern auftreten, mit welcher Häufigkeit die Ziffer 1 oder 7 auftritt, ist damit aber nicht gesagt.

Dieselbe Fragestellung wird üblicherweise bei der (gewöhnlichen) Dezimalentwicklung reeller Zahlen aufgeworfen.

Definition 3 *Eine relle Zahl x heißt* **normal** *(zur Basis* 10*), wenn in der Dezimalentwicklung jeder mögliche Ziffernblock der Länge l ($l \geq 1$) mit der Häufigkeit 10^{-l} auftritt.*

Insbesondere treten alle Ziffern $a \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ mit Häufigkeit 1/10 auf, alle Ziffernpaare ab ($a, b \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$) mit Häufigkeit 1/100 etc.

Einerseits gibt es *sehr viele* normale Zahlen, wie man aus dem Gesetz der großen Zahlen ablesen kann.

Satz 17 *Fast alle reelle Zahlen sind normal, d.h. die Menge jener reellen Zahlen, die nicht normal sind, hat Lebesguemaß* 0.

Andererseits kennt man (konkret) *fast keine* normale Zahlen. Die Dezimalentwicklung von

$$\begin{aligned} \pi &= 3.14159265358979323846264338327950288419716939937510 \\ &\quad 58209749445923078164062862089986280348253421170679\cdots \end{aligned}$$

ist zwar sehr genau berechnet worden, und es sieht ganz so aus, als wäre π normal, aber damit ist dies in keiner Weise bewiesen. Man kann damit nicht einmal die Frage beantworten, ob 7 unendlich oft vorkommt oder nicht. Auch über die Ziffernentwicklung von

$$\begin{aligned} \sqrt{2} &= 1.41421356237309504880168872420969807856967187537694 \\ &\quad 80731766797379907324784621070388503875343276415727\cdots \end{aligned}$$

ist nichts dergleichen bekannt.

Trotzdem kann man normale Zahlen angeben.

Satz 18 *Die folgenden reellen Zahlen sind normal zur Basis* 10*:*

1. $x = 0.12345678910111213141516171819202122\cdots$.
   Die Ziffern werden durch Hintereinanderstellen der Dezimalentwicklungen der positiven natürlichen Zahlen gebildet.
2. $x = 0.1491625364964811001211411691962252 56\cdots$.
   Die Ziffern werden durch Hintereinanderstellen der Dezimalentwicklungen der Quadrate der positiven natürlichen Zahlen gebildet.
3. $x = 0.23571113171923293137414347535961717 3\cdots$.
   Die Ziffern werden durch Hintereinanderstellen der Dezimalentwicklungen der Primzahlen gebildet.
4. $x = 0.4925491211692893615298419611369168 1\cdots$.
   Die Ziffern werden durch Hintereinanderstellen der Dezimalentwicklungen der Quadrate der Primzahlen gebildet.

Es gibt noch viele weitere Beispiele dieser Art. Der Nachweis der Normalität ist aber (bis auf den ersten Fall) sehr schwierig und verlangt aufwendige Abschätzungen für Exponentialsummen. (Eine ausführliche Darstellung dieser Thematik finden Sie etwa in [2].)

Ein interessanter Aspekt normaler Zahlen ist der Zusammenhang mit **Zufallszahlen**. Für eine relle Zahl x betrachtet man die Folge $10^k x$ und davon nur den Nachkommaanteil $x_k = 10^k x - [10^k x]$, d.h. man erhält eine Folge von Zahlen zwischen 0 und 1. Für $x = \pi$ wären dies die Zahlen

$$
\begin{aligned}
x_0 &= 0.14159265358979323846264338327950288419716939937510\cdots,\\
x_1 &= 0.41592653589793238462643383279502884197169399375105\cdots,\\
x_2 &= 0.15926535897932384626433832795028841971693993751058\cdots,\\
x_3 &= 0.59265358979323846264338327950288419716939937510582\cdots,\\
x_3 &= 0.92653589793238462643383279502884197169399375105820\cdots,\\
x_4 &= 0.26535897932384626433832795028841971693993751058209\cdots,\\
x_5 &= 0.65358979323846264338327950288419716939937510582097\cdots,\\
x_6 &= 0.53589793238462643383279502884197169399375105820974\cdots,\\
x_7 &= 0.35897932384626433832795028841971693993751058209749\cdots,\\
x_8 &= 0.58979323846264338327950288419716939937510582097494\cdots,\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Es ist leicht einzusehen, daß eine relle Zahl genau dann normal ist, wenn die Folge der Zahlen $x_k = 10^k x - [10^k x]$ im Intervall $[0,1]$ gleichverteilt ist, also als Zufallszahl dienen kann.

Literatur

[1] P. J. DAVIS, *The Lore of Large Numbers*, Random House, Westminster, Maryland, 1963.

[2] M. DRMOTA and R. F. TICHY, *Sequences, Discrepancies and Applications*, Lecture Notes Math. **1651**, Springer, Berlin, 1997.

[3] M. E. LINES, *A Number for Your Thoughts*, Institute of Physics Publishing, Bristol, Philadelphia, 1986.

Michael Drmota
Institut für Geometrie
TU Wien
Wiedner Hauptstraße 8-10
A-1040 Wien